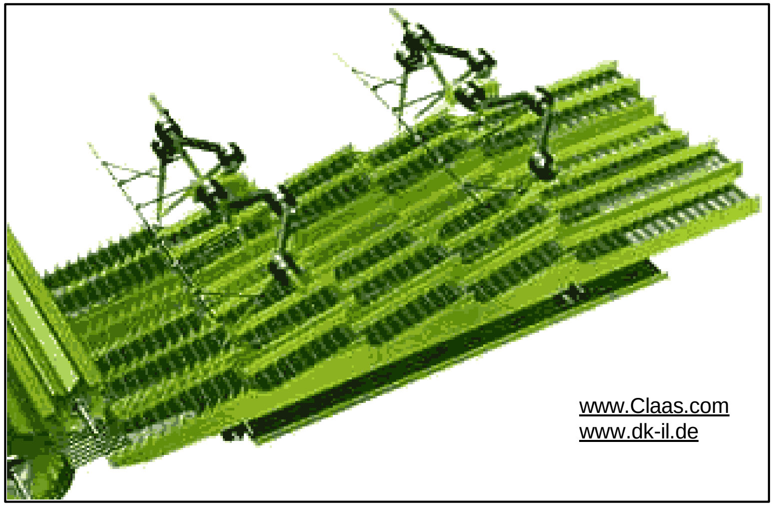
Schwingungen

Schwingungen allgemein

Schwingungen allgemein

Bewegliche Körper und insbesonders federnd gelagerte Körper lassen sich in schwingende Bewegungen versetzten. Schwingungen sind rhythmische Bewegungen um eine Ruhelage. Mechanische Schwingungen entstehen durch die Wirkung einer Rückstellkraft auf einen Körper mit träger Masse.
Bei zahlreichen natürlichen und technischen Vorgängen werden Schwingungen genutzt, um bestimmte technische Aufgaben zu erfüllen, z.B.:

Schüttler
im Mähdrescher zur Trennung von Korn und Stroh



www.Claas.com
www.dk-il.de

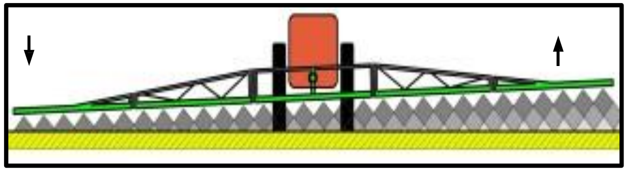
Siebanalyse
zur Klassierung von Schüttgütern

www.haver-partikelanalyse.com

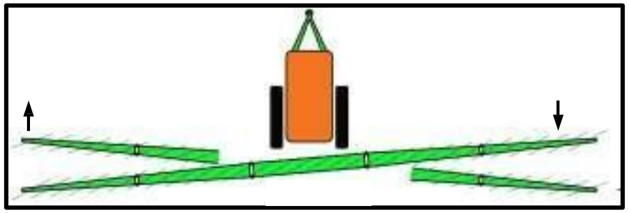
Schwingungen allgemein

Schwingungen entstehen mitunter ungewollt und können negative Folgen haben, wenn sich Erregerfrequenzen und Eigenfrequenzen überlagern z.B.:

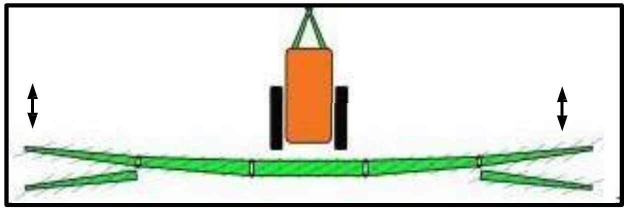
Schwankenes Gestänge bei der Pflanzenschutzspritze



Schwingungen in vertikaler Ebene



Schwingungen in horizontaler Ebene



Schwingungen nach vorn und hinten

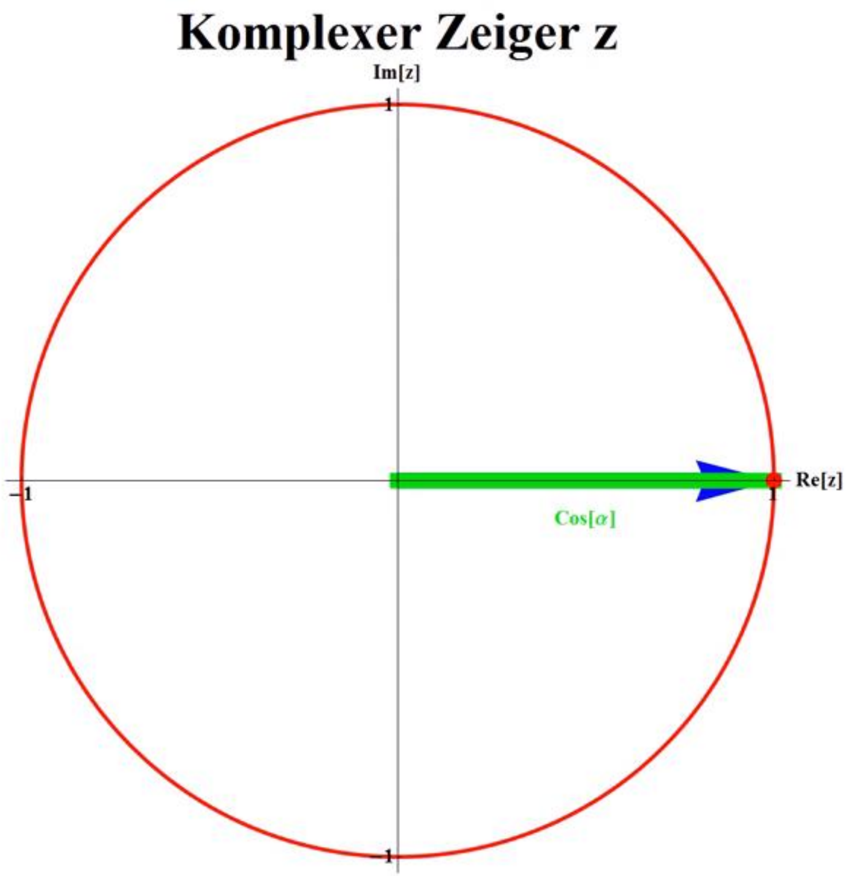
Flatternde Spannrolle bei Riementrieben

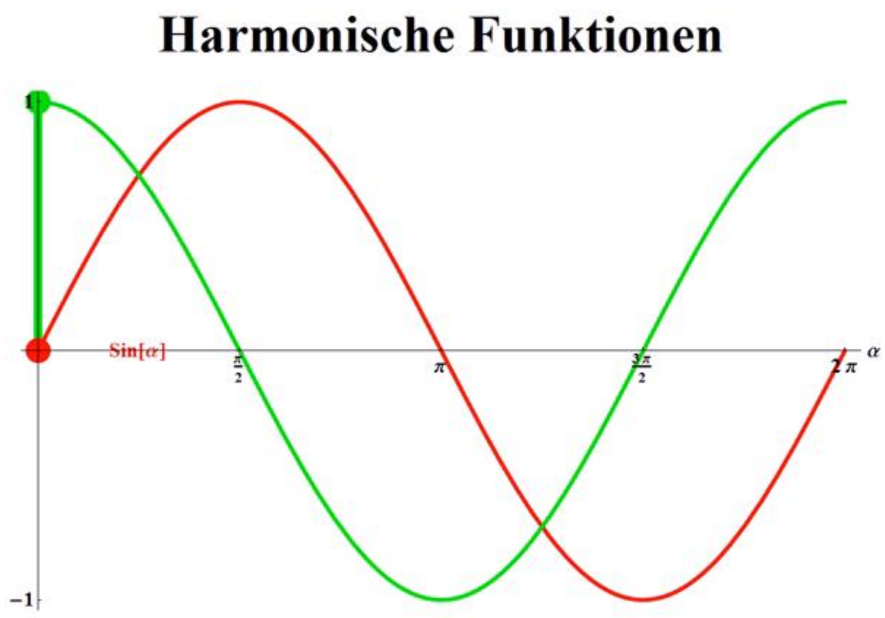
20.1 Gestängeschwingungen bei Feldspritzen

20.1 Gestängeschwingungen bei Feldspritzen

Harmonische Schwingungen

20.2 Harmonische Schwingung

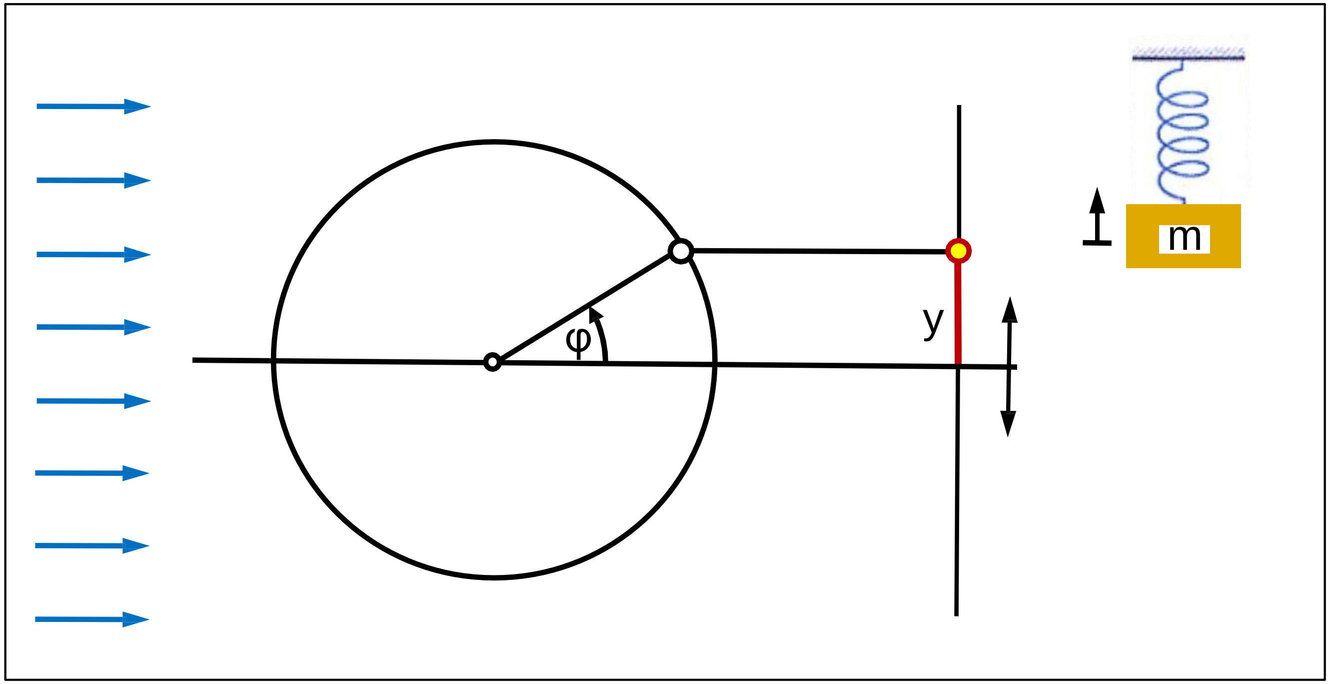




Harmonische Schwingungen

In der Regel treten harmonische Schwingungen auf, sie folgen einer Sinusfunktion und sind somit mathematisch einfach darstellbar.

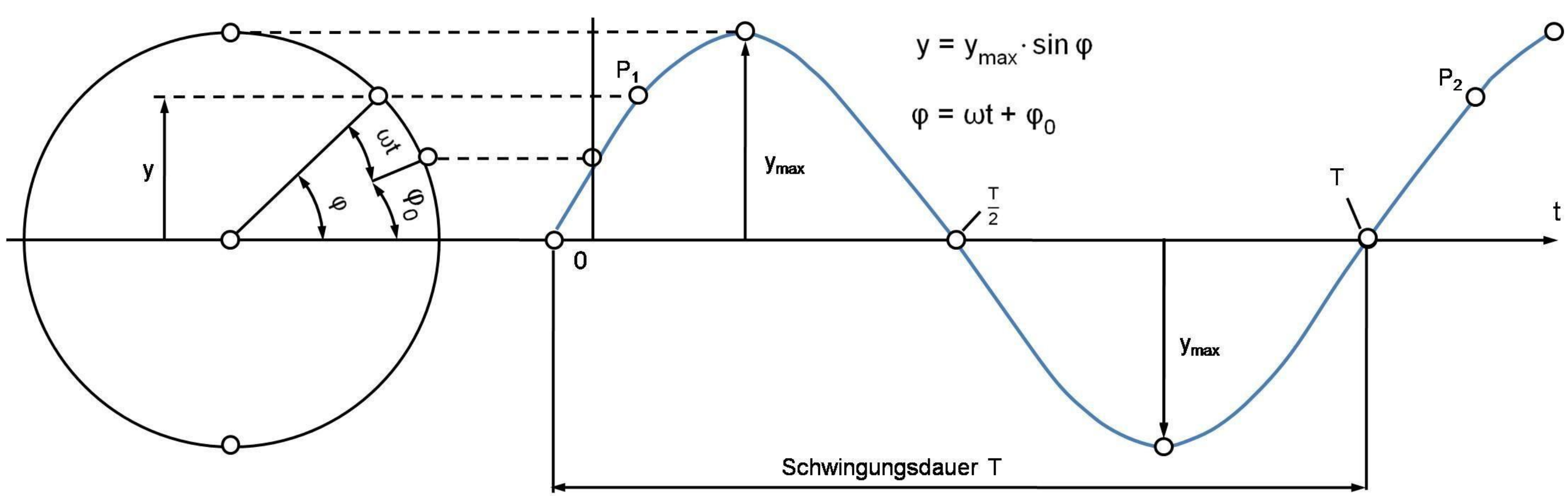
Die harmonische Schwingung lässt sich aus der Kreisbewegung eines Punktes ableiten. Der Schatten des auf -und ab bewegten Punktes vollführt eine Sinusschwingung.
Die Schwingung einer federnd aufgehängten Masse lässt sich mit dieser Bewegung synchronisieren, in dem man Amplitude und Frequenz aufeinander abstimmt.



Harmonische Schwingungen

Folgende Angaben charakterisieren eine harmonische Schwingung:

Frequenz	$f = \frac{z}{t}$ (Hz)	Anzahl der Schwingungen pro Sekunde $1\ \frac{1}{s} = 1$ Hz 1000 Hz $= 1$ kHz
Schwingungsdauer	$T = \frac{1}{f}$ (s)	Zeitdauer für eine Hin– und Herbewegung
Amplitude	s_{max}, y_{max}	größte Entfernung aus der Ruhelage
Auslenkung / Elongation s,y		augenblickliche Entfernung aus der Ruhelage
Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi \cdot f$	Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Punktes, $n \triangleq f$
Phasenwinkel	$\phi = \omega \cdot t$	umlaufender Winkel in Bogenmaß



www.scheufler.de

Weg – Zeit – Funktion der harmonischen Schwingung

Harmonische Schwingungen

Legt man den Beginn der Zeitachse mit dem Augenblick zusammen, in dem der schwingende Körper die Ruhelage durchläuft, dann gilt:

$\varphi_0 = 0$ $s = s_{max} \cdot \sin \omega t$ Funktion der harmonischen Schwingung

Bei einer harmonischen Schwingung wiederholen sich die Ausschläge in regelmäßigen Abständen, sie befinden sich dann in gleicher Phase. Bei der oben genannten Funktion beträgt der Phasenwinkel von P_1 bis P_2 $\varphi = 2\pi$.
Eine vollständige Schwingung wird nach der Zeit T durchlaufen. Der Umlaufwinkel beträgt dann $\varphi = 360° = 2\pi$. Es ergibt sich somit $\varphi = \omega \cdot T = \frac{\omega}{f} = 2\pi$

wobei gilt: $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$

Harmonische Schwingungen

Es gelten folgende Zeit-Funktionen

$$s = s_{max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Weg - Zeit - Funktion

Durch Differentiation erhält man

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = s_{max} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Geschwindigkeit - Zeit - Funktion

oder auch

$$v = s_{max} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Phasenwinkel der Geschwindigkeit ist $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ T größer als der Phasenwinkel der Auslenkung s. Die maximale Geschwindigkeit beträgt

$$v_{max} = s_{max} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Durch weitere Differentiation erhält man

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\, s_{max} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \pi\right)$$

Beschleunigungs - Zeit - Funktion

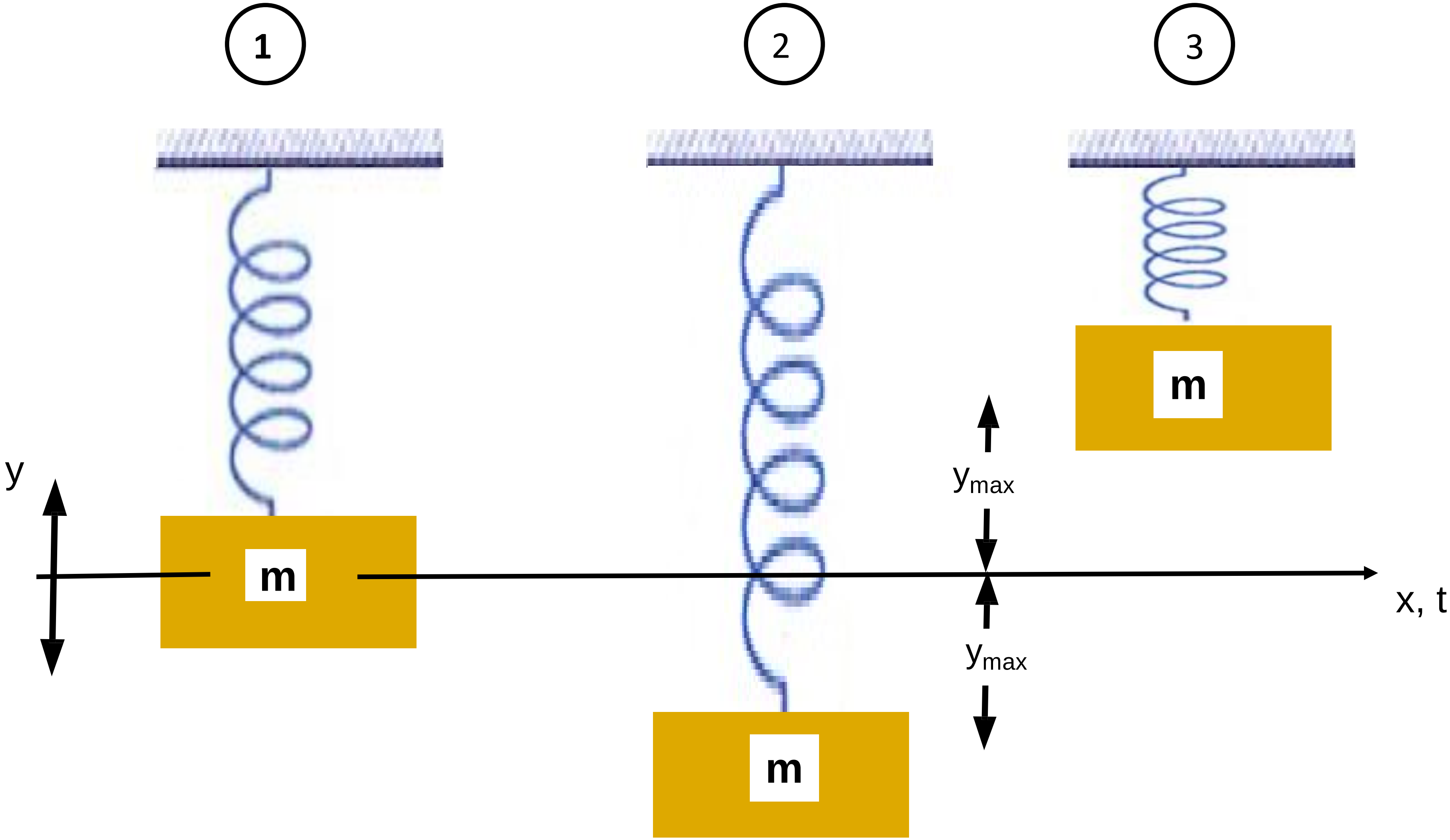
Der Phasenwinkel der Beschleunigung ist um π oder $\frac{T}{2}$ (halbe Schwingung) größer als der Phasenwinkel der Auslenkung s. Das Minuszeichen besagt, die Beschleunigungen wirkt stets entgegengesetzt zur jeweiligen Auslenkung s.

Die die größte Beschleunigung des schwingenden Körpers tritt in den in den Umkehrpunkten z.B. $\frac{T}{4}$ auf und beträgt $a_{max} = s_{max} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

Harmonische Schwingung

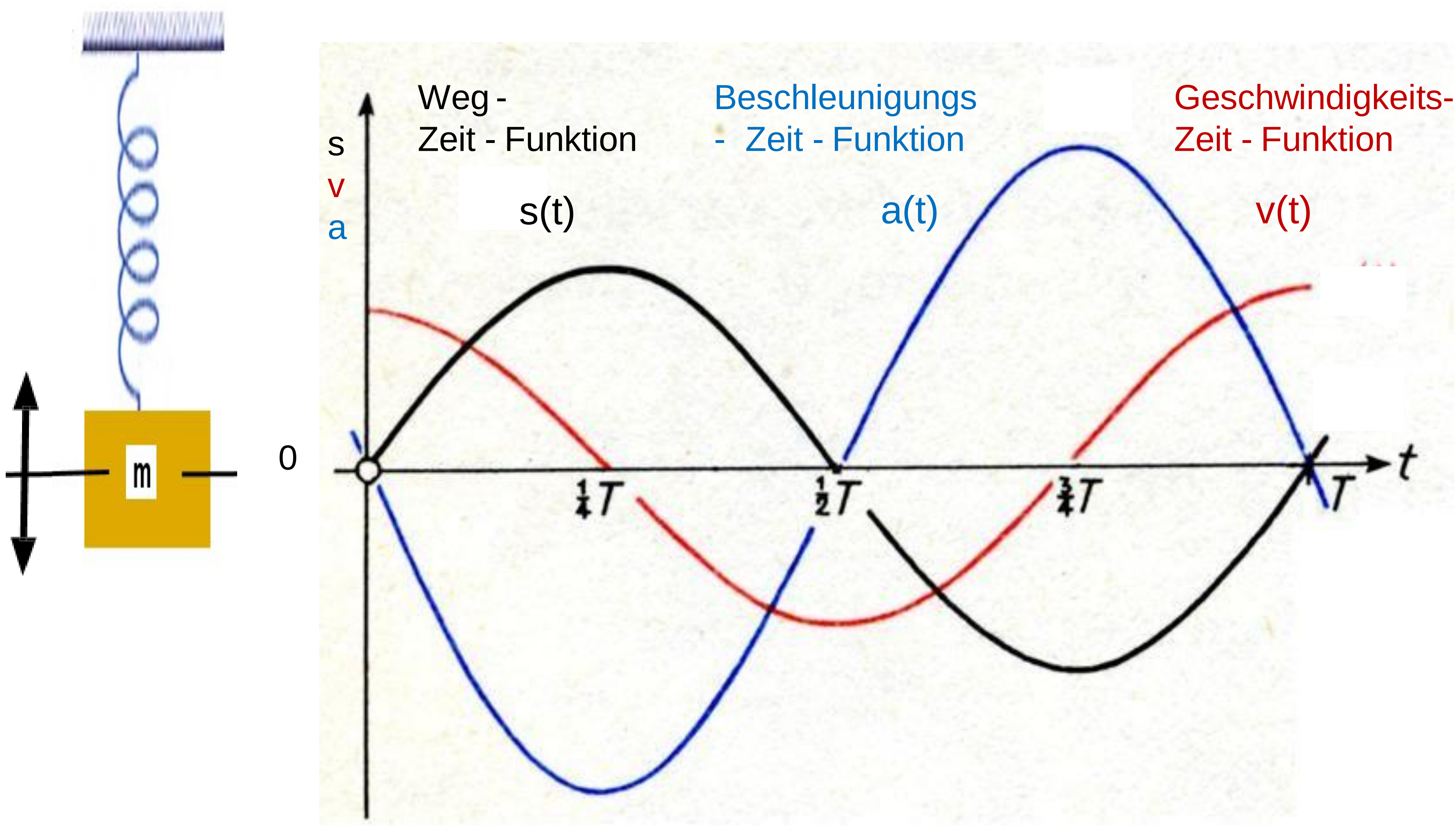
Versuch 1

Harmonische Schwingung



www.scheufler.de

Harmonische Schwingungen

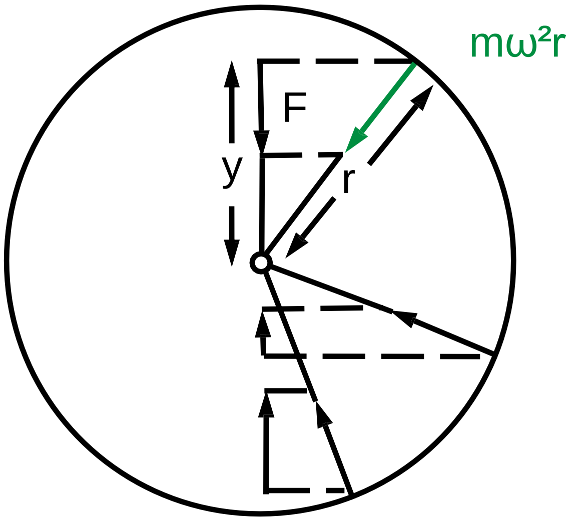


Zeit - Funktionen für Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Freie harmonische Schwingungen

Die dehnende Kraft F = D · y wirkt zu jeder Zeit entgegengesetzt zur rücktreibenden Kraft. Betrachtet man dazu die Schwingungen wieder als Kreisbewegung, dann ergeben sich in Verbindung mit der Zentrifugalkraft folgende Verhältnisse (Strahlensatz)

$$\frac{m\omega^2 r}{r} = \frac{F}{y} \qquad F = m\omega^2 \cdot y$$



In Verbindung mit der dehnenden Kraft ergibt sich

$$D \cdot y = m\omega^2 \cdot y \qquad D = m\omega^2$$

mit $\omega = 2\pi \cdot f$ und $T = \frac{1}{f}$ ergibt sich

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$ Eigenfrequenz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$ Schwingungsdauer

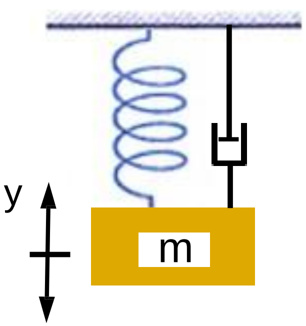
Es gelten folgende Aussagen

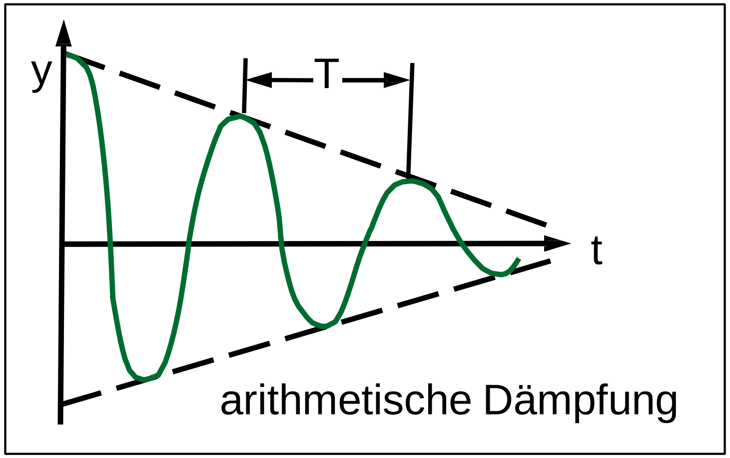
- Die Schwingungsdauer ist von der Amplitude y_{max} unabhängig.
- Das System schwingt um so langsamer bzw. die Schwindungsdauer nimmt zu, je größer die angehängte Masse m ist.
- Das System schwingt um so schneller, bzw. die Schwingungsdauer nimmt ab, je größer ihre Federkonstante / Richtgröße D ist.
- Mit den Eigenfrequenzen ist es genau umgekehrt.

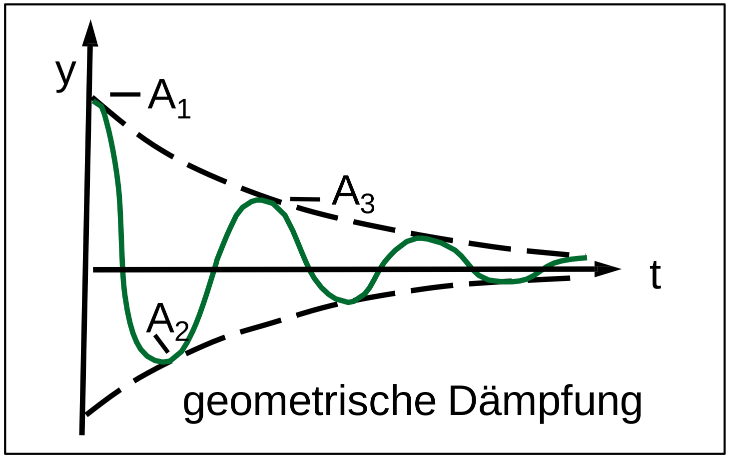
Gedämpfte Schwingungen

Eine gedämpfte Schwingung liegt vor, wenn die Amplituden des schwingenden Systems im Zeitverlauf immer kleiner werden und schließlich eine stabile Ruhelage einnehmen. Verursacht wird die Abnahme durch Kräfte wie Lagerreibung und Luftwiderstand, die der Bewegung des System entgegenwirken.

Das Maß der Dämpfung bestimmt, wie schnell ein schwingendes System zur Ruhe kommt. Ist die dämpfende Gegenkraft konstant - z.B. bei Coulombscher Reibung - dann verringern sich die Amplituden in arithmetischer Reihenfolge. Ist die dämpfende Kraft proportional zur Geschwindigkeit - z.B. bei der Wirkung des Luftwiderstandes - dann verringern sich die Amplituden in geometrischer Reihenfolge.







Die Verringerung der Amplituden in geometrischer Reihenfolge tritt besonders häufig auf. Der Quotient zweier aufeinander folgender Amplituden ist dabei konstant

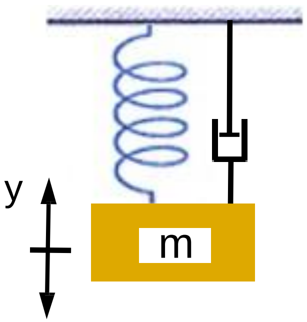
$$K = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \text{konstant}$$ Dämpfungsverhältnis

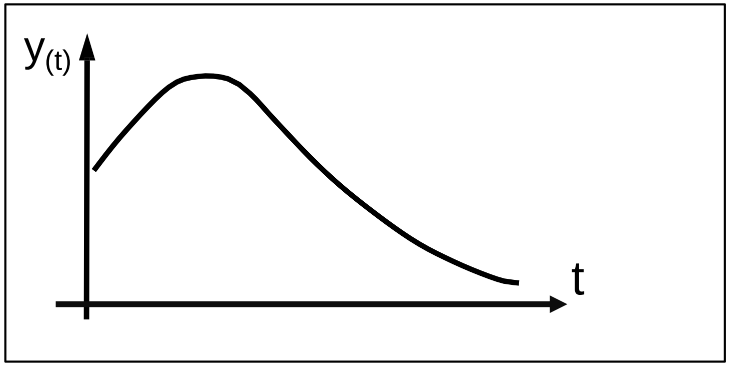
Versuch 2

Gedämpfte Schwingung

Gedämpfte Schwingungen

Ist die Dämpfung so stark, dass die Amplitude innerhalb der halben Schwingungsdauer zur Ruhe kommt, dann liegt eine aperiodische Dämpfung vor.

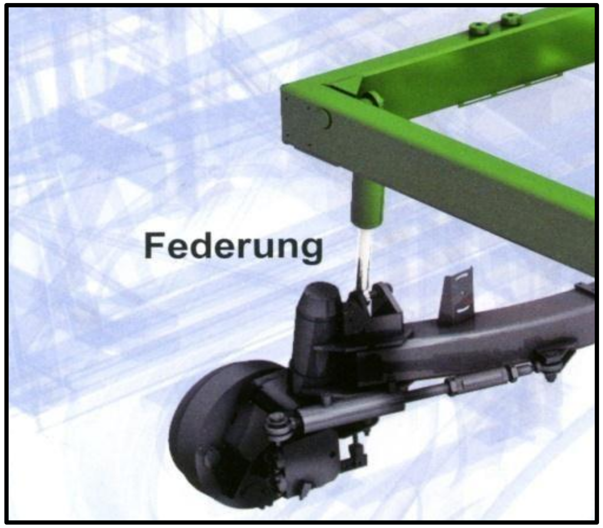


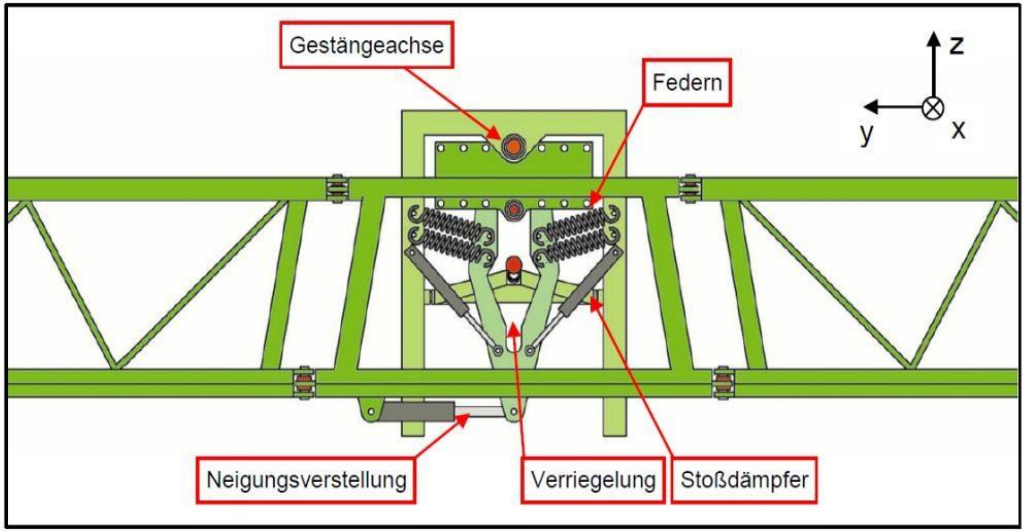


www.Grammer.com

In der mobilen Agrartechnik werden ganze Kabinen oder Sitze federnd gelagert. Dadurch verbessert sich deutlich die Ergonomie. Der Dauerarbeitsplatz für die Fahrer bietet dadurch deutlich mehr Komfort.

Gedämpfte Schwingungen





Gedämpfte
Fahrwerksaufhängung

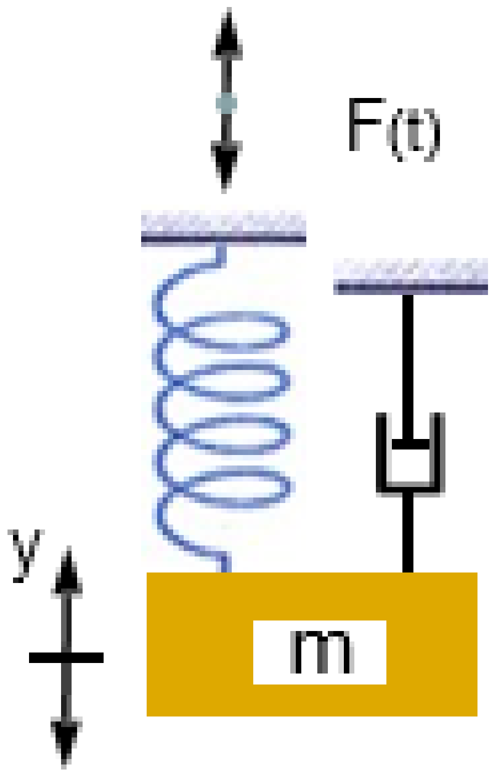
Spritzgestänge mit
Schwingungsdämpfung

Selbsterregte Schwingung

Eine selbsterregte Schwingung liegt vor, wenn man einem Schwingungsystem die während einer Schwingungsdauer verlorengegangene Energie von einem inneren Energieträger periodisch wieder zuführt.

Dies kann geschehen, wenn beispielsweise bei einer Kinderschaukel bei jedem Bewegungswechsel ein kurzer Anstoß erfolgt. Mit zunehmender Frequenz gestaltet sich der Nachschub von Energie schwieriger, da eine Synchronisation erfolgen muss.

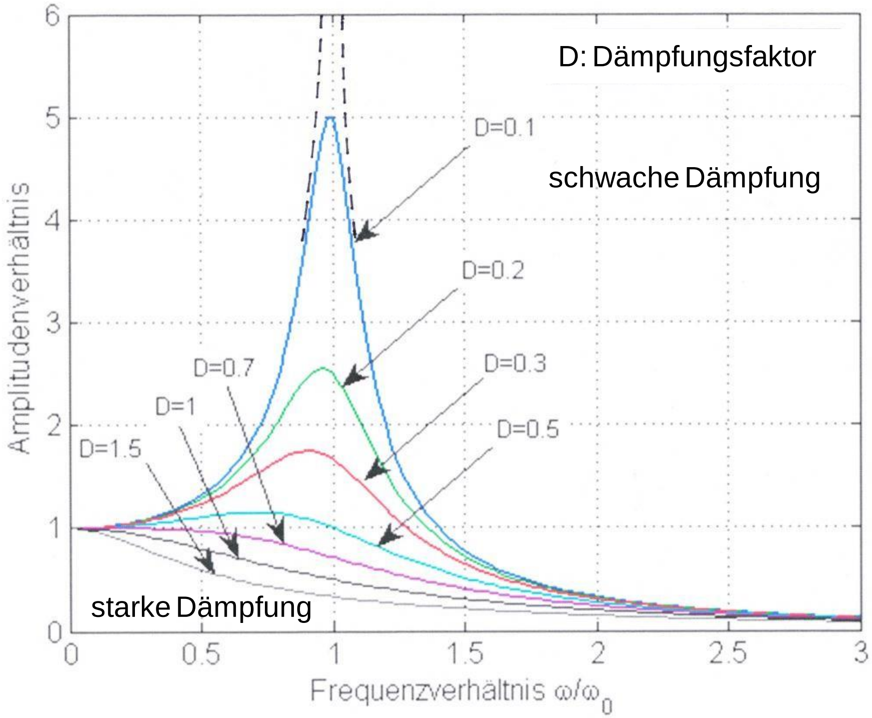
Erzwungene Schwingungen



Erzwungene Schwingungen

Stimmen Erregerfrequenz und Eigenfrequenz $f = f_o$, dann tritt Resonanz ein. Die Erregerfrequenz liegt $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer vor der Eigenfrequenz. Ohne Dämpfung würde die Amplitude laufend zunehmen, bis es zur Resonanzkatastrophe kommt, das System wird zerstört.

Bei weiterer Steigerung der Erregerfrequenz nehmen die Amplituden wieder ab. Das Schwingungsystem beginnt im Gegentakt zu schwingen.



Resonanzkatastrophe

zugeführte Energie größer als Schwingungsverluste
(Reibung)

↓

immer mehr Schwingungsenergie im System

↓

Amplitude wird immer größer
(nicht die Frequenz)

↓

Amplitude wird zu groß

↓

System zerstört sich

20.3 Resonanzkatastrophe

Universität
Bremen

Quelle: Youtube

20.3 Anhänger schlingert

20.4.1 / 2   Schwingende Brücke

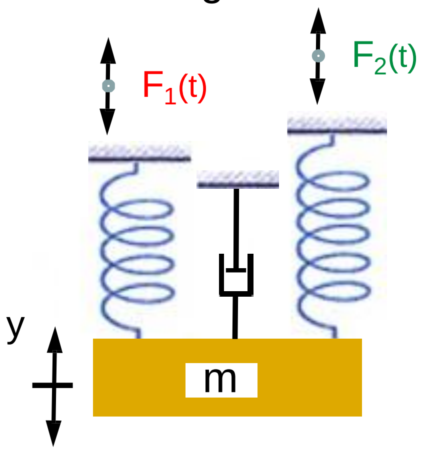
Quelle: Youtube

20.4.1 / 2   Schwingende Brücke

Quelle: Youtube

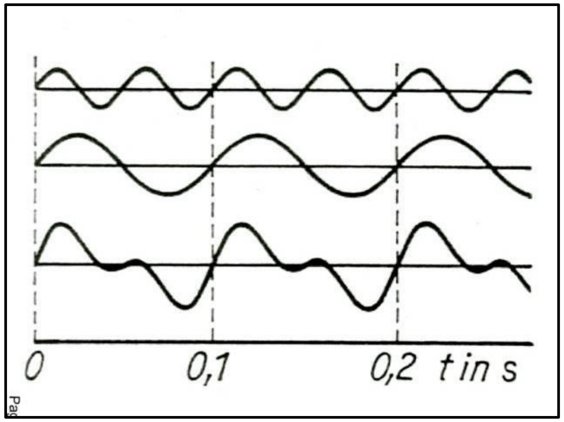
Überlagerte Schwingungen

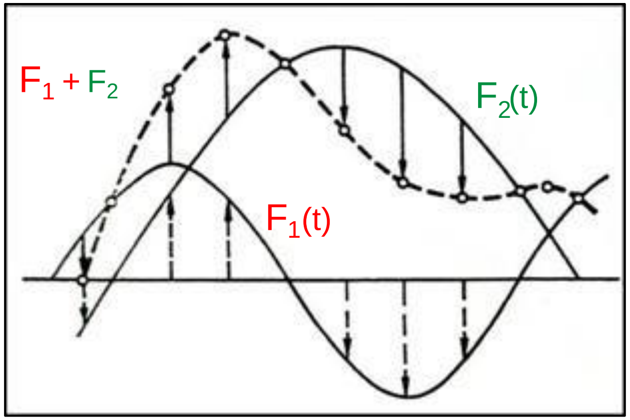
Eine überlagerte Schwingung liegt vor, wenn ein Schwingungssystem durch zwei verschiedene Schwingungen angeregt wird. Die beiden Schwingungen addieren sich zu einer zusammengesetzten Schwingung.



hohe Frequenz

niedrige Frequenz

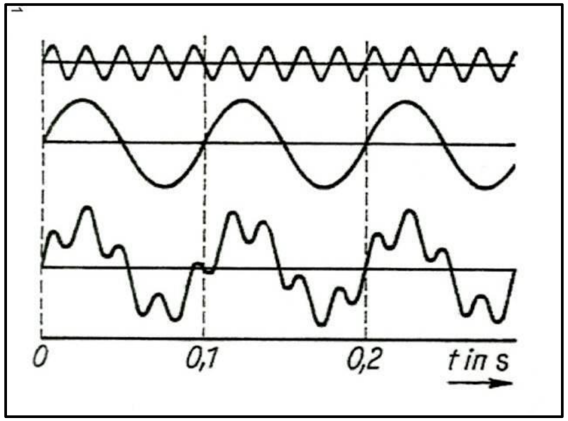




sehr hohe Frequenz

niedrige Frequenz

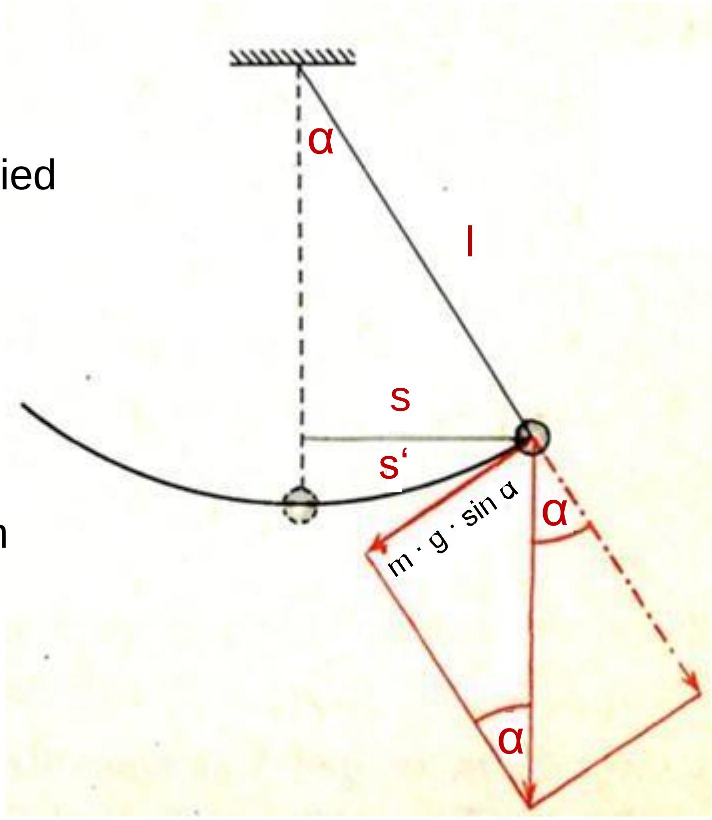
Charakter der niedrigen Frequenz bleibt erhalten



Mathematisches Pendel

Bei einem mathematischen Pendel ist eine punktförmige Masse an einem masselosen Faden aufgehängt. Dieses Schwingungssystem führt Schwingungen im Schwerefeld der Erde aus. Für einen Versuch lässt sich dies Schwingungssystem mit einem dünnen langen Faden und einem entsprechend schweren angehängten Gewicht. Die Gewichtskraft ist vertikal nach unten gerichtet und lässt sich in eine radiale und tangentiale Kraft F zerlegen.

$F = m \cdot g \cdot \sin\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{s}{l} \qquad s' > s$



Es besteht also kein linearer Zusammenhang, die Bogenlänge s‘ ist länger als die Seitenlänge s im Dreieck. Bei kleinen Ausschlägen besteht kaum noch ein Unterschied zwischen s‘ und s.

Es gilt dann $F = \frac{m \cdot g}{l} \quad s' \approx \frac{m \cdot g}{l} \cdot s$

Der Fehler bei 10° Ausschlag beträgt 0,5 %. Das mathematische Pendel lässt sich so hinreichend genau als harmonisches Schwingungssystem betrachten. Gemäß der linearen Federschwingung mit $D = \frac{F}{y}$ und $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ ergibt sich

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$ Schwingungsdauer des mathematischen Pendels

20.5 Pendelversuche

Pendel 1

Pendel 2

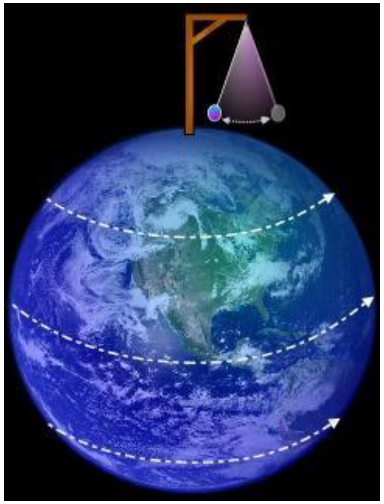
Mathematisches Pendel

Es ergeben sich folgende Aussagen:

1. Die Federwirkung wird durch die Erdbeschleunigung ersetzt
2. Die Masse des pendelnden Körpers hat keinen Einfluss
3. Die Länge des Pendels beeinflusst die Schwingungsdauer
4. Die Auslenkung des Pendels hat keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer

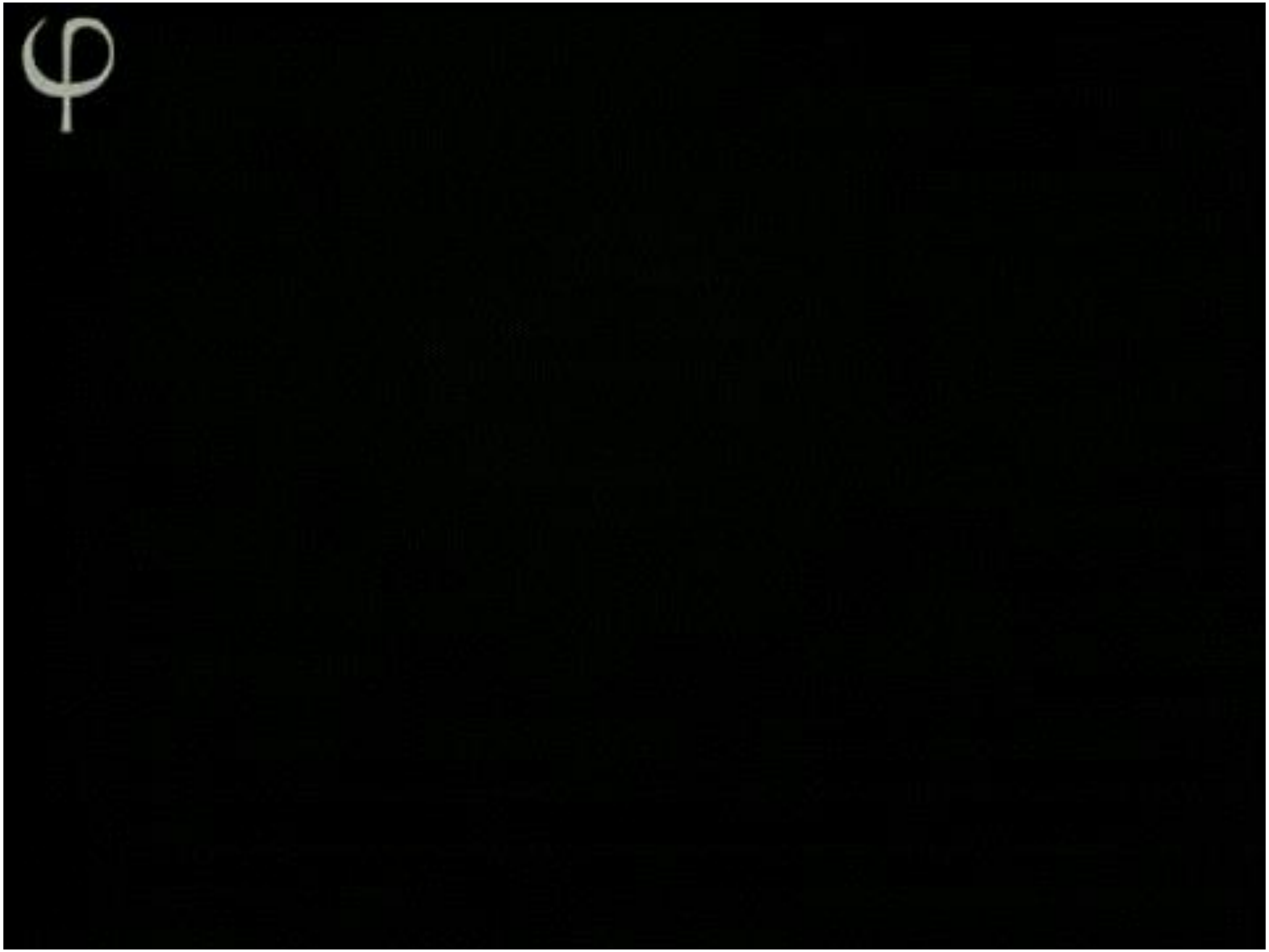
Foucault hat 1851 die Erdrotation nachgewiesen, in dem er ein Pendel in einer Ebene hat schwingen lassen.

Jean Bernard Foucault
(* 1819 † 1868)



www.wikiedpia.org

20.6 Foucault Pendel

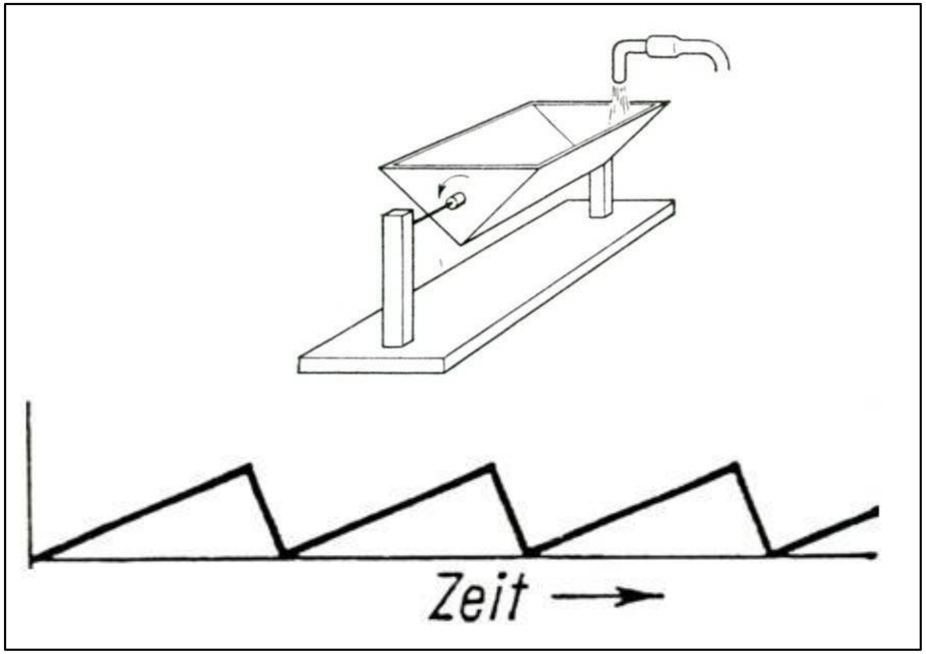


Nicht harmonische Schwingungen

Kippschwingungen, Sägezahnschwingungen

Kippschwingungen oder Sägezahnschwingungen liegen vor, wenn einem sehr langsamen Aufschwingen eine sehr schnelle Abschwingung folgt. Es entsteht eine periodische, nicht sinusförmige Schwingung mit dem charakteristischen Aussehen der sogenannten Sägezahnschwingung.

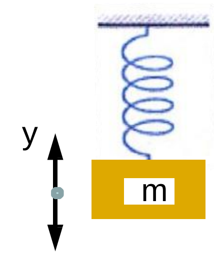
Beispiel
Ein dreieckförmiger pendelnd aufgehängter Trog wird langsam mit Wasser gefüllt.
Mit aufsteigenden Wasserpegel verschiebt sich der Schwerepunkt der Trog wird instabil und kippt um. In kurzer Zeit erfolgt die Entleerung und der Trog richtet sich wieder auf. Der langsame Füllvorgang wiederholt sich.



Diese Methode wurde früher oftmals angewendet, um z.B. Flüssigkeiten zu portionieren. Heutzutage spielen solche Schwingungen in der Mikroelektronik eine große Rolle, z.B. um Schaltvorgänge auszulösen.

Schwingungen - Aufgabe

An einer senkrecht hängenden Feder wird eine Masse m = 25 kg befestigt, wobei sich die Feder um y_1 = 40 mm verlängert.



Es ist zu bestimmen:

Federkonstante D des Feder-Masse-Systems

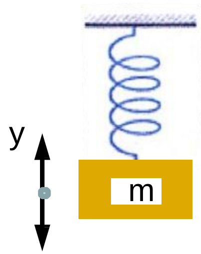
D = N/m

Schwingungen - Aufgabe

Die Masse wird um $y_2 = 20$ mm nach unten gezogen und losgelassen.
Das System fängt an zu schwingen.

Es sind zu bestimmen:

Eigenfrequenz



f = Hz

Schwingungen - Aufgabe

Kreisfrequenz

$\omega =$ 1/s

Schwingungsdauer

$T =$ s

Schwingungen - Aufgabe

gehört in diesem Semester nicht zum Prüfungsstoff

Weg- Zeit- Funktion

Geschwindigkeit- Zeit- Funktion

Beschleunigungs- Zeit- Funktion

Schwingungen - Aufgabe

gehört in diesem Semester nicht zum Prüfungsstoff

v_{max}

$v_{max} =$ m/s

a_{max}

$a_{max} =$ m/s²

Schwingungen - Aufgabe

Der Hänger hinter einem Traktor wird mit 5 Rundballen beladen.
2 Rundballen wiegen je 350 kg, die anderen 3 wiegen je 400 kg

Berechnen Sie die die Masse m_R und die Gewichtskraft F_R durch die Beladung

$m_R =$ kg

$F_R =$ kN

Der Hänger federt um 10 cm ein.

Wie groß ist die Richtgröße / Federkonstante D der Federung?
(gedanklich werden alle Federn zu einer zusammengefasst)

$D =$ kN/cm

Schwingungen - Aufgabe

Bei der Transportfahrt wird der Hänger durch Bodenunebenheiten zum Schwingen angeregt. Wie groß ist die Schwingungsdauer des **leeren** Hängers, wenn der mitschwingende Teil des Hängers eine Masse von m_H = 2500 kg aufweist?

T = s

Wie groß ist die Eigenfrequenz des **beladenen** Hängers?

f = H_z

Die Schwingung klingt ab entsprechend eine geometrischen Dämpfung.
Die Amplitudenwerte betragen
A_1 = 10 cm
A_3 = 1,6 cm
Wie groß ist die Amplitude A_2?

A_2 = cm

Pendel - Aufgabe

Wie lang ist das Pendel, das für eine Halbschwingung genau 1 Sekunde benötigt?

l = m

Wie lang ist das Pendel, das für eine ganze Schwingung genau 1 Sekunde benötigt?

l = m

Wie lang ist das Pendel, das für eine ganze Schwingung genau 10 Sekunden benötigt?

l = m

Versuch 3

Pendel